1 Решение дифференциальных уравнений первого порядка.

1.1 Дифференциальные уравнения с разделяющимися переменными.

Пример 1.
$xyy' = (y^2 - 1)$

$$xy\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = (y^2 - 1)$$

Приведём к уравнению с разделёнными переменными и проинтегрируем.

$$\int \frac{y \cdot \mathrm{d}y}{y^2 - 1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}(y^2 - 1)}{y^2 - 1} = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\frac{1}{2}\ln|y^2 - 1| = \ln|x| + \ln|C|$$

$$\ln\sqrt{y^2 - 1} = \ln|x| + \ln|C|$$

Уберём логарифмы и возведём в квадрат:

$$y^2 - 1 = x^2 \cdot C'$$

Ответ: $y^2 - 1 = x^2 \cdot C'$

Пример 2. (Лунгу № 2.1.21)

$y' - xy^2 = 0$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = xy^2$$

Приведём к уравнению с разделёнными переменными и проинтегрируем.

$$\int \frac{\mathrm{d}y}{y^2} = \int x\mathrm{d}x$$

$$-\frac{1}{y} = \frac{x^2}{2} + \frac{C}{2}$$

$$y = -\frac{2}{x^2 + C}$$

Ответ: $y = -\dfrac{2}{x^2 + C}$

1.2 Линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

Общий вид Л.Д.У.

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x) \cdot y = Q(x)$$

Схема решения Л.Д.У.

Здесь представлены только формулы для решения, подробный вывод читай по теме: линейные дифференциальные уравнения первого порядка.

$$y = u(x) \cdot v(x)$$

$$v(x) = e^{-\int P(x)\mathrm{d}x}$$

$$y = v(x) \cdot \left[\int \frac{Q(x)}{v(x)}\mathrm{d}x + C\right]$$

Пример 3.

$$y - y' + \frac{3e^x}{\sin^2 3x} = 0$$

$$y' - y = \frac{3e^x}{\sin^2 3x}$$

Найдём $v(x)$, подставив в формулу (см. общий вид) известное $P(x)$.

$$v(x) = e^{-\int -1 \mathrm{d}x} = e^x$$

$$y = e^x \cdot \left[\int \frac{3e^x}{\sin^2 3x \cdot e^x} \mathrm{d}x + C \right]$$

$$y = e^x \cdot \left[\int \frac{\mathrm{d}(3x)}{\sin^2 3x} + C \right]$$

$$y = e^x \cdot (-\mathrm{ctg}(3x) + C)$$

Ответ: $y = e^x \cdot (-\mathrm{ctg}(3x) + C)$

Пример 4. (Лунгу № 2.3.2)

$$y' - 2xy = e^{x^2}$$

Решаем по той же схеме.

$$v(x) = e^{-\int -2x \mathrm{d}x} = e^{x^2}$$

$$y = e^{x^2} \cdot \left[\int \frac{e^{x^2}}{e^{x^2}} \mathrm{d}x + C \right]$$

$$y = e^{x^2} \cdot \left[\int 1 \mathrm{d}x + C \right]$$

$$y = e^{x^2} \cdot (x + C)$$

Ответ: $y = e^{x^2} \cdot (x + C)$

1.3 Однородные дифференциальные уравнения первого порядка.

Однородное уравнение нулевого измерения можно привести к виду:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

Метод замены переменной.

Сделаем подстановку:

$u = \dfrac{y}{x}$, то есть $y = u \cdot x$, тогда $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u \cdot x}{\mathrm{d}x} + u$

Подставляя выражение производной в уравнение, получим:

$$\frac{\mathrm{d}u \cdot x}{\mathrm{d}x} + u = f\left(1, \frac{y}{x}\right)$$

$$\frac{\mathrm{d}u \cdot x}{\mathrm{d}x} = f(1, u) - u$$

Получили уравнение с разделяющимися переменными.

$$\frac{\mathrm{d}u}{f(1, u) - u} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Проинтегрировав это выражение и подставив вместо u отношение y/x, получим ответ.

Пример 5.

$$y' = \frac{8xy - 28x^2 - 7y^2}{8x^2}$$

Разделим правую часть.

$$y' = \frac{y}{x} - \frac{7}{2} - \frac{7}{8}\frac{y^2}{x^2}$$

Сделаем подстановку $u = \dfrac{y}{x}$, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{\mathrm{d}u \cdot x}{\mathrm{d}x} + u$

$$u + \frac{\mathrm{d}u \cdot x}{\mathrm{d}x} = u - \frac{7}{2} - \frac{7}{8} \cdot u^2$$

$$\frac{\mathrm{d}u \cdot x}{\mathrm{d}x} = -\frac{7}{2} - \frac{7}{8} \cdot u^2$$

$$\frac{\mathrm{d}u \cdot x}{\mathrm{d}x} = -\frac{7}{2} \cdot \left(1 + \frac{u^2}{2^2}\right)$$

$$\int \frac{\mathrm{d}u}{1 + \left(\frac{u}{2}\right)^2} = -\frac{7}{2} \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$\int \frac{2 \cdot \mathrm{d}\left(\frac{u}{2}\right)}{1 + \left(\frac{u}{2}\right)^2} = -3,5 \cdot (\ln|x| + \ln|C|)$$

$$2\,\mathrm{arctg}\frac{u}{2} = -3,5 \cdot \ln|Cx|$$

Подставим вместо u отношение y/x.

$$2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{2x}\right) = -3,5 \cdot \ln|Cx|$$

Ответ: $2\,\mathrm{arctg}\left(\frac{y}{2x}\right) = -3,5 \cdot \ln|Cx|$

Пример 6. (Лунгу № 2.2.2)

$$y\mathrm{d}x + (x + y)\mathrm{d}y = 0$$

Сделаем так, чтоб в левой части остался только y'.

$$y + (x + y)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{-y}{x + y}$$

Сделаем подстановку $u = \frac{y}{x}$, $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}u \cdot x}{\mathrm{d}x} + u$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot x + u = \frac{-u}{1 + u}$$

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} \cdot x = \frac{-2u - u^2}{1 + u}$$

$$\int \frac{(1 + u)\mathrm{d}u}{-2u - u^2} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

Найдём интеграл слева, для этого сделаем замену. $t = -2u - u^2$, тогда $\mathrm{d}t = (-2 - 2u)\mathrm{d}u = -2(1 + u)\mathrm{d}u$

$$\int \frac{(1+u)\mathrm{d}u}{-2u-u^2} = \int \frac{-\frac{1}{2}\mathrm{d}t}{t}$$

Подставим интеграл в уравнение.

$$-\frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \int \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

$$-\frac{1}{2}\ln|t| = \ln|x| + ln|C|$$

Воспользуемся свойствами логарифмов.

$$\frac{1}{\sqrt{t}} = Cx$$

$$t = (Cx)^{-2}$$

Перейдем от t, к u, а далее от u к y/x.

$$-2u - u^2 = C' \cdot x^{-2}$$

$$u^2 \cdot x^2 + 2 \cdot u \cdot x^2 = C''$$

$$y^2 + 2xy = C''$$

Ответ: $y^2 + 2xy = C$